K-theoretic analogue of Schur's Q-functions and isotropic Grassmannians (Representation Theory and Combinatorics)

池田, 岳; 成瀬, 弘

数理解析研究所講究録
第 1689 巻 2010 年 10-15

K-theoretic analogue of Schur's Q-functions and isotropic Grassmannians

池田 岳 (岡山理科大), 成瀬 弘 (岡山大)

Abstract. Grassmann 多様体上の連接層の Grothendieck 群は Schubert 多様体の構造層たちを基底とする自由加群である．この基底について，積の構造定数を記述するという問題は Anders S. Buch によって解かれた．彼の議論では stable Grothendieck 多項式と呼ばれる特殊多項式が用いられている．以上を概観した後，この Buch の結果を Lagrangian 型の Grassmann 多様体に拡張する試みについてお話ししたい．

1 序

Schur の Q 関数には少なくとも 2 通りの意味がある．ひとつは表現論，もうひとつはシューベルト・カルキュラスと関連している：

- Schur (1911): 対称群の "spin 指標" を与える関数 $Q_\lambda(x)$ を導入した．
  ここに $\lambda = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_r > 0)$: strict partition（自然数の狭義減少列）
- Pragacz (1990): Lagrangian Grassmannian の Schubert 類 σ_λ が $Q_\lambda(x)$ と同一視できることを見いだした．

この事実は，Schur 関数 $s_\lambda(x)$ が Grassmannian の Schubert 類と同一視されることの類似であると考えられる．本講演では，Q 関数の K 理論的な類似を導入してその性質を議論する．

A 型[*1]おいて知られていることを振り返ろう．Grassmannian の Schubert 多様体 X_λ の構造層が連接層の Grothendieck 群に定める元 $[\mathcal{O}_{X_\lambda}] \in K(Grass)$ は stable Grothendieck polynomials $G_\lambda(x)$ と呼ばれる対称関数によって表現されることが知られている．次で定まる構造定数 $c_{\lambda\mu}^{\nu} \in \mathbb{Z}$

$$G_\lambda(x)G_\mu(x) = \sum_\nu c_{\lambda\mu}^{\nu} G_\nu(x)$$

に対して，Buch [B] は組合せ的な記述を与えた．$G_\lambda(x)$ そのものは「集合値」半標準盤にわたる単項式の和としての表示を持っている．詳細は [B] をご覧いただきたい．

[*1] 通常の Grassmann 多様体が $GL_n(\mathbb{C})$ の等質空間なので「A 型の場合」と表現している．Lagrangian Grassmannian は symplectic 群 $Sp(2n, \mathbb{C})$ の等質空間なので，その意味では C_n 型に相当する．

この講演の目的は以下の通りである：

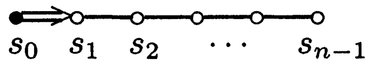
(1) Lagrangian Grassmannian の Grothendieck 群において Schubert 元 $[\mathcal{O}_{X_\lambda}]$ を表現する関数 $GQ_\lambda(x)$ を導入する.
(2) $GQ_\lambda(x)$ の組合せ的記述を与える.
(3) Pieri 型公式の予想を述べる.

2 Schubert 類の定義など

Lagrangian Grassmannian の Schubert 類などの定義をする.

ひとまず，一般的に G を $\mathbb{C}$ 上の連結半単純代数群とする．Borel 部分群 B と極大トーラス T を $G \supset B \supset T$ ととる．さらに P を B を含む放物型部分群とする．考えるのは「一般旗多様体」G/P 上の T 同変な連接層のなす Grothendieck 環 $K_T(G/P)$ である．Weyl 群を W とし，P に対応する部分群を W_P とする．Schubert 多様体は剰余集合 W/W_P で添字付けられている.

タイプを C_n として Dynkin 図形と Weyl 群の生成元を次のように対応させる：



Weyl 群 $W = W(C_n)$ は集合 $\{1, \ldots, n, \bar{n}, \ldots, \bar{1}\}$ の置換 w であって $w(\bar{i}) = \overline{w(i)}$ をみたすものと同一視される．s_0 は 1 と $\bar{1}$ の互換，s_i $(1 \leq i \leq n-1)$ は i と $i+1$ を置換，したがって $\bar{i}$ と $\overline{i+1}$ に置換し，その他を不動にする置換とみなされる．放物型部分群 P としては $W_P = \langle s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle \cong S_n$ (n 次対称群) となるもの*2を考える．このとき G/P は Lagrangian Grassmannian

$$G/P = L\mathbb{G}(n) := \{V \subset \mathbb{C}^{2n} \mid \dim V = n,\ V \text{ is isotropic w.r.t.} \langle\ ,\ \rangle\}$$

である．$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{C}^{2n}$ 上の非退化な skew symmetric form である.

任意の coset uW_P $(u \in W)$ には "最短" の元がただひとつある．実際 W の長さ関数を ℓ とするとき $W^P := \{w \in W \mid \ell(ws_i) = \ell(w) + 1\ (1 \leq i \leq n-1)\}$ とおくと $W^P \cong W/W_P$ (全単射) となる．$\lambda = (n \geq \lambda_1 > \cdots > \lambda_r > 0)$ なる strict partition の集合は W^P と一対一に対応する.

---

*2 Dynkin 図形の黒丸で示した頂点 (s_0 に対応) に付随する標準的な極大放物型部分群.

$\lambda=(4,2,1)$ を例に説明すると，対応は次のようである．Shifted Young 図形に書き込まれた生成元 s_i（主対角に s_0 を書き，右側に $s_1, s_2, \ldots$ と書く）を上の行から順に左から右に読んで，それらを右から順にならべて積をとる：

$$\begin{array}{ll} (1)\longrightarrow & \boxed{s_0}\boxed{s_1}\boxed{s_2}\boxed{s_3} \\ (2)\longrightarrow & \phantom{\boxed{s_0}}\boxed{s_0}\boxed{s_1} \\ (3)\longrightarrow & \phantom{\boxed{s_0}\boxed{s_0}}\boxed{s_0} \end{array} \qquad \underset{\overset{(3)}{\longleftarrow}}{s_0} \cdot \underset{\overset{(2)}{\longleftarrow}}{s_1 s_0} \cdot \underset{\overset{(1)}{\longleftarrow}}{s_3 s_2 s_1 s_0} \in W^P$$

こうして得られた W^P の元を置換[*3]としてみると $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n \\ \overline{4} & \overline{2} & \overline{1} & 3 & 5 & 6 & \cdots & n \end{pmatrix}$ となっていて，strict partition $\lambda=(4,2,1)$ との対応が見やすい．

$\lambda=(n \geq \lambda_1 > \cdots > \lambda_r > 0)$ に対応する Schubert 多様体は次のように定義される：

$$X_\lambda = \{V \in L\mathbb{G}(n) \mid \dim(V \cap F_{n+1-\lambda_i}) \geq i \ (\forall i)\}.$$

ここに

$$0 \subset F_1 \subset \cdots F_n \subset F_{n+1} \subset \cdots \subset F_{2n} = \mathbb{C}^{2n}$$

は $\mathbb{C}^{2n}$ の旗であって $F_{n+i} = F_{n-i}^{\perp} := \{v \in \mathbb{C}^{2n} \mid \langle v, u\rangle = 0 \ (\forall u \in F_{n-i})\}$ をみたすものとする．特に F_n は Lagrangian 部分空間である．

3 関数 $GQ_\lambda(x)$

眼目の関数を定義する．

β を不定元とし $x \oplus y = x + y + \beta xy$ とおく．パラメータ（不定元）$b_1, b_2, \ldots$ を用意して，自然数 k に対して

$$[x|b]^k = (x \oplus x)(x \oplus b_1)\cdots(x \oplus b_{k-1})$$

とおく．この b_i というパラメータは T-同変の K 理論を取り扱うために必要となるものである．すべての b_i を零と特殊化すれば同変でない K 理論の話になる．

$\lambda = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_r > 0)$ のとき $\ell(\lambda) = r$ とおき

$$GQ_\lambda(x|b) = \frac{1}{(n-r)!}\sum_{w \in S_n} w\left[\prod_{i=1}^{n}[x_i|b]^{\lambda_i}\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=i+1}^{n}\frac{x_i \oplus x_j}{x_i \ominus x_j}\right]$$

[*3] $1, 2, \ldots, n$ の行き先を決めると $\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n}$ の行き先は決まる．

という関数を定義する．ここでは $x=(x_1,\dots,x_n)$ と n 変数の関数としている．ここに $x\ominus y=(x-y)/(1+\beta y)$ とした．$(x\ominus y)\oplus y=x$ が成り立つことに注意せよ．

注意．$\beta=0$, $b_i=0(\forall i)$ とおくと $GQ_\lambda(x|b)$ は $Q_\lambda(x)$ に一致する．

定理 1 ([IN])．$\beta=-1, b_i=1-e^{\varepsilon_i}$ とおくとき $GQ_\lambda(x|b)$ は $[\mathcal{O}_{X_\lambda}]_T\in K_T(L\mathbb{G}(n))$ を "表現" する．より正確には，次が成り立つ：μ に対応する T 固定点を $e_\mu\in L\mathbb{G}(n)$ とし $\iota_\mu: e_\mu\hookrightarrow L\mathbb{G}(n)$ を埋め込み写像とするとき次が成立する：

$$GQ_\lambda(\ominus b_{\mu_1},\dots,\ominus b_{\mu_r},0,\dots,0|b)=\iota_\mu^*([\mathcal{O}_{X_\lambda}]_T)\in K_T(e_\mu).$$

ここに $\ominus b=0\ominus b$ の意味であり，n 変数のうち $n-r$ 個を 0 としている．また，$K_T(e_\mu)$ は T の表現環 $R(T)=\mathbb{Z}[e^{\pm\varepsilon_1},\dots,e^{\pm\varepsilon_n}]$ と同一視している．

注意．ここでは T-同変の K 理論 $K_T(L\mathbb{G}(n))$ において構造層[*4]の類 $[\mathcal{O}_{X_\lambda}]_T$ を考えている．"局所化写像" ι_μ^* $(\forall\mu)$ による $[\mathcal{O}_{X_\lambda}]_T$ の像を与えれば $[\mathcal{O}_{X_\lambda}]_T$ は確定する．このように T-同変の理論を援用することが我々の研究の特徴である．

注意．直交型の Grassmannian に関しても同様の関数が定義できて，同様の結果が成り立つ ([IN])．

注意．A 型に関しては McNamara [M] によって "Factorial Grothendieck 多項式" が導入され，組合せ的な性質が調べられている．この関数について，同変 K 理論を背景とする上記の定理の類似も成立する ([IN])．McNamara は，この事実には気がついていなかったとのことである．

4 組合せ的表示

関数 $GQ_\lambda(x|b)$ の組合せ論的な性質について述べる．

集合 $\mathbb{P}=\{1,2,\dots,n\}$ と各元に prime をつけたコピー $\mathbb{P}'=\{1',2',\dots,n'\}$ を用意する．$\mathbb{X}=\mathbb{P}\cup\mathbb{P}'$ とし，全順序 $1'<1<2'<2<\cdots<n'<n$ を定めておく．λ は，それと対応する shifted Young 図形と同一視する．ただし箱の座標 (i,j) は行列の添字と同様に配置し i を行の添字，j を列の添字と呼ぶ．通常の Young 図形と違って第 i 行の先頭の箱の座標が (i,i) となるように右に shift しているので shifted Young 図形と呼んでい

[*4] X_λ が T の作用で stable なので $\mathcal{O}_{X_\lambda}$ は T 同変である．

る（下の例を参照）．各箱 (i,j) に $\mathbb{X}$ の空でない有限部分集合 $T(i,j)$ を書き込む．任意の $a \in A, b \in B$ に対して $a \leq b$ が成り立つとき $A \leq B$ と書く．T が λ を台とする集合値の半標準盤であるとは以下が成り立つことをいう：

(1) $T(i,j) \leq T(i,j+1), \quad T(i,j) \leq T(i+1,j)$,
(2) 各行に $k' \in \mathbb{P}'$ は高々 1 個，各列に $k \in \mathbb{P}$ は高々 1 個．

台が λ の集合値の半標準盤全体の集合を $\mathcal{T}(\lambda)$ と表わす．

$T \in \mathcal{T}(\lambda)$ に含まれる k および k' の総数を $m_k(T)$ として変数 $x = (x_1, x_2, \ldots)$ の単項式 $x^T = x_1^{m_1(T)} \cdots x_n^{m_n(T)}$ を対応させる．例えば $\lambda = (3,2)$ ならば次のような半標準盤がある：

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1'1 & 12'2 & 23' \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 2'3 & 34 \\ \cline{2-3} \end{array} \qquad x^T = x_1^3 x_2^4 x_3^3 x_4$$

パラメータ $b = (b_1, b_2, \ldots)$ をすべて零に特殊化して $GQ_\lambda(x) = GQ_\lambda(x|0)$ とおく．

定理 2 ([IN])**.** $GQ_\lambda(x)$ は次のように表示される：

$$GQ_\lambda(x) = \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda)} \beta^{|T|-|\lambda|} x^T.$$

$|T|$ は T に含まれる文字の総数であり，$|\lambda|$ は strict partition のサイズ $\sum_i \lambda_i$ である．

注意. このような組合せ的表示はパラメータ b_i が零とは限らない場合にも得られている ([IN])．ここでは説明を簡略化するために，上記の形で述べた．

変数 x はここまでは $x = (x_1, \ldots, x_n)$ と n 変数としたが，無限個の変数 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ に拡張して定義することができる．以下，$GQ_\lambda(x)$ は，そのように拡張されたものとする．$\lambda \Rightarrow \mu$ は λ に対して，各行・各列に高々 1 個の □ を加えて μ が得られることを意味するものとする．局所化写像を用いた計算例などに基づいて以下の予想が定式化できる．ただし，ここでは簡単のため b_i をすべて零とおいた形で述べる．

予想.

$$(1 + \beta GQ_1(x)) \cdot GQ_\lambda(x) = \sum_{\lambda \Rightarrow \mu,\ \ell(\lambda) = \ell(\mu)} \sum_{\mu \Rightarrow \nu} \beta^{|\nu|-|\mu|} GQ_\nu(x).$$

例：$(1 + \beta GQ_1) GQ_2 = GQ_2 + 2GQ_3 + GQ_{2,1} + 2\beta GQ_{3,1} + \beta GQ_4 + \beta^2 GQ_{4,1}$.

注意．講演の際には予想として述べたこの公式は，沼田泰英氏 (東京大/JST CREST) の協力を得て，$GQ_k(x) \cdot GQ_\lambda(x)$ に一般化した場合まで証明ができている（2010 年 1 月現在)．定理の証明のため，集合値半標準盤 T へ $\mathbb{X}$ の有限部分集合 X を「挿入」して新たな半標準盤 $T \leftarrow X$ をつくる Robinson-Schensted タイプのアルゴリズムを与える．

注意．上記の予想は，パラメータ b を含む $GQ_\lambda(x|b)$ の場合にも定式化できているが，現時点では証明できていない．

参考文献

[B] A. Buch, A Littlewood-Richardson rule for the K-theory of Grassmannians, Acta Math., 189 (2002), 37-78.

[IN] T. Ikeda and H. Naruse, in preparation

[INN] T. Ikeda, H. Naruse, and Y. Numata, in preparation

[M] P. McNamara, Factorial Grothendieck Polynomials, Electron. J. Combin. 13 (2006), R71.